

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, У КОТОРЫХ ВСЕ СОБСТВЕННЫЕ ПОДГРУППЫ ЛИБО ОБОБЩЕННО СУБНОРМАЛЬНЫ, ЛИБО ОБОБЩЕННО АБНОРМАЛЬНЫ

В.Н. Семенчук

Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины
Советская 104, 246019 Гомель, Беларусь semenchuk@gsu.by

Рассматриваются только конечные группы. В работе [1] Fattachi A. изучил группы, у которых любая собственная подгруппа либо нормальна, либо абнормальна. Затем Ebert G., Bauman E. в работе [2] изучили группы, у которых любая собственная подгруппа либо субнормальна, либо абнормальна.

В теории классов конечных групп естественным обобщением понятия субнормальности и абнормальности являются понятия обобщенной субнормальности и абнормальности.

В 1986 году соответственно в работах [3, 4] Förster P., Семенчук В.Н. изучали группы, у которых все собственные подгруппы либо обобщенно субнормальны, либо обобщенно абнормальны. Дальнейшее развитие данного направления связано с работой В.Н. Семенчука и С.Н. Шевчука [5], в которой изучались группы, у которых все примарные подгруппы либо обобщенно субнормальны, либо обобщенно абнормальны.

Важный шаг в развитии данного направления связан с работой В.Н. Семенчука и А.Н. Скибы [6], в которой были описаны группы, у которых все собственные подгруппы либо \mathcal{U} -субнормальны (\mathcal{U} — формация всех сверхразрешимых групп), либо \mathcal{U} -абнормальна.

Формация \mathfrak{F} — класс групп, замкнутых относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений.

Группа называется минимальной \mathfrak{F} -группой, если она не принадлежит \mathfrak{F} , но все собственные подгруппы ее принадлежат \mathfrak{F} . В частности, не нильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется группой Шмидта.

Важную роль в дальнейших исследованиях сыграли формации Шеметкова, т.е. формации, у которых все минимальные не \mathfrak{F} -группы являются либо группами Шмидта, либо группами простого порядка.

Теорема. Пусть \mathfrak{F} — насыщенная наследственная формация Шеметкова, содержащая все нильпотентные группы. Тогда и только тогда любая собственная подгруппа группы $G \notin \mathfrak{F}$ либо \mathfrak{F} -субнормальна, либо \mathfrak{F} -абнормальна, когда G имеет следующее строение:

- 1) G — разрешимая группа;
- 2) $G = G_{q'} \rtimes G_q$, где $G_{q'} = G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, G_q — циклическая подгруппа Картера;
- 3) любая максимальная подгруппа из G_q нормальна в G .

Следствие 1. Пусть \mathfrak{F} — формация всех p -нильпотентных групп. Тогда и только тогда любая собственная подгруппа группы G не принадлежащей \mathfrak{F} либо \mathfrak{F} -субнормальна, либо \mathfrak{F} -абнормальна, когда $G = G_p \rtimes G_q$, где $q \neq p$, G_q — циклическая подгруппа Картера, любая максимальная подгруппа из G_q нормальна в G , $G_p = G^{\mathfrak{F}}$.

Следствие 2. Пусть \mathfrak{F} — формация всех p -разложимых групп. Тогда и только тогда любая собственная подгруппа не p -разложимой группы G либо \mathfrak{F} -субнормальна, либо \mathfrak{F} -абнормальна, когда G — разрешимая группа одного из следующих типов:

- 1) $G = G_p \rtimes G_q$, где $q \neq p$, G_q — циклическая подгруппа Картера, любая максимальная подгруппа из G_q нормальна в G , $G_p = G^{\mathfrak{F}}$.
- 2) $G = G_{p'} \rtimes G_p$, где $G_{p'} = G^{\mathfrak{F}}$, G_p — циклическая подгруппа Картера и любая максимальная подгруппа из G_p нормальна в G .

Литература

1. Fattachi A. *Groups with only normal and abnormal subgroups* // J. Algebra. 1974. Vol. 28. No. 1. P. 15–19.
2. Ebert G., Bauman S. *A note on subnormal and abnormal chains* // J. Algebra. 1975. Vol. 36. No. 2. P. 287–293.
3. Förster P. *Finite groups all of whose subgroups are \mathfrak{F} -subnormal or \mathfrak{F} -subabnormal* // J. Algebra. 1986. № 1. P. 285–293.
4. Семенчук В.Н. *Строение конечных групп с \mathfrak{F} -абнормальными или \mathfrak{F} -субнормальными подгруппами* // Вопросы алгебры. 1986. № 2. С.50–55.
5. Семенчук В.Н., Шевчук С.Н. *Конечные группы, у которых примарные подгруппы либо \mathfrak{F} -субнормальны, либо \mathfrak{F} -абнормальны* // Известия вузов. Математика. 2011. № 8. С. 46–55.
6. Semenchuk V.N., Skiba A.N. *On one generalization of finite \mathfrak{A} -critical groups* // [arXiv:1412.5469v1](https://arxiv.org/abs/1412.5469v1).